

“汤液经法图”五味化合理论的数学模型分析

金锐^{1,2}, 方子寒^{3*}, 朱贺⁴, 韩晟^{4*}

(1. 首都医科大学附属北京世纪坛医院, 北京 100038;

2. 中国中医科学院西苑医院, 北京 100091;

3. 中国生物技术发展中心, 北京 100039;

4. 北京大学医药管理国际研究中心, 北京 100191)

[摘要] 目的: 梁代陶弘景所撰《辅行诀五脏用药法要》转引了已遗方书《汤液经法》的诸多内容, 其中包括一幅中药组方配伍原理图, 即“汤液经法图”。“汤液经法图”描述了一个独特的五脏虚实辨证(肝心脾肺肾)和五味补泻配伍(辛咸甘酸苦)理论体系, 以中心对称的五边形表示, 其中每一脏均有其固定对应的“体”味(泻), “用”味(补)和两者合化的“化”味(调和)。其中, 酸泻肝、辛补肝、酸辛化甘缓肝, 苦泻心、咸补心、苦咸化酸收心, 辛泻脾、甘补脾、辛甘化苦燥脾, 咸泻肺、酸补肺、咸酸化辛散肺, 甘泻肾、苦补肾、甘苦化咸润肾。该研究选择适当的数学工具分析“汤液经法图”五脏之间“体”味, “用”味和“化”味之间的固定关系, 建立五味化合关系的数学模型。**方法:** 基于五行(木火土金水)的群表示, 应用矩阵计算方法和群论推导五脏“体”味, “用”味, “化”味与五行生克间的关系, 拓展三维空间向量积的计算方法, 建立五味化合的数学算子。**结果与结论:** “汤液经法图”中五脏“体”味, “用”味, “化”味所代表的泻、补、调和作用与五行生克存在映射关系, 通过研究建立的五味化合数学算子, 可以诠释五味化合的固定搭配。采用这种算法, 可以清晰地阐释10首代表性经方的五味补泻功效特点。

[关键词] 汤液经法图; 五行; 数学模型; 中药; 配伍

[中图分类号] TQ018; R289; R22; R2-031; R33 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1005-9903(2021)20-0191-09

[doi] 10.13422/j.cnki.syfjx.20211311

[网络出版地址] <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.3495.R.20210823.1829.001.html>

[网络出版日期] 2021-08-24 11:14

Mathematical Model for Analyzing Five Flavor Compatibility-transformation Theory in Tangye Jingfatu

JIN Rui^{1,2}, FANG Zi-han^{3*}, ZHU He⁴, HAN Sheng^{4*}

(1. Beijing Shijitan Hospital, Capital Medical University, Beijing 100038, China;

2. Xiyuan Hospital, China Academy of Chinese Medical Sciences, Beijing 100091, China;

3. China National Center for Biotechnology Development, Beijing 100039, China;

4. International Research Center for Medicinal Administration Peking University, Beijing 100191, China)

[Abstract] **Objective:** Auxiliary Verse on Drugs and methods for Zang-Fu Organs (*Fuxingjue Wuzangyongyao Fayao*) written by TAO Hong-jing from the Liang dynasty covered many contents from a missing prescription book *Classic of Decoction (Tangye Jingfa)*, including a map revealing the compatibility principle of Chinese herbs, namely the Tangye Jingfatu. Represented by a centrosymmetric pentagon, the map describes a unique theoretical system for deficiency-excess syndrome differentiation of five Zang organs (liver, heart, spleen, lung and kidney) and the tonification-purgation and compatibility theory of five flavors (pungent,

[收稿日期] 20210819(011)

[基金项目] 首都卫生发展科研专项(首发2020-2-2081); 中国中医科学院科技创新工程重大攻关项目(CI2021A00101)

[第一作者] 金锐, 博士, 副主任药师, 从事中药临床药学与中药药性理论研究工作, Tel: 010-62835473, E-mail: jinrui9862@126.com

[通信作者] * 方子寒, 硕士, 研究实习员, 从事中医药战略研究和科研项目管理工作, Tel: 010-88225195, E-mail: fangzh@cncbd.org.cn;

* 韩晟, 博士, 研究员, 从事药物经济学和药物流行病学研究工作, Tel: 010-82805019, E-mail: hansheng@bjmu.edu.cn

salt, sweet, sour and bitter). Each Zang organ fixedly corresponds to one "property" flavor (purgation), one "function" flavor (tonification) and one "transformation" flavor (harmonization) resulting from the combination of the former two. For example, the liver can be purged by sour, tonified by pungent, and moderated by sweet transformed by the combination of sour with pungent. The heart can be purged by bitter, tonified by salt, and astringed by sour transformed by the combination of bitter with salt. The spleen can be purged by pungent, tonified by sweet, and dried by bitter transformed by the interaction between pungent and sweet. The lung can be purged by salt, tonified by sour, and dispersed by pungent transformed by the combination of salt with sour. The kidney can be purged by sweet, tonified by bitter, and moistened by salt transformed by the combination of sweet with bitter. This study selected appropriate mathematical tools to analyze the fixed relationship between "property" flavor, "function" flavor and "transformation" flavor among the five Zang organs in "Tangye Jingfatu" and establish a mathematical model revealing the compatibility-transformation relationship among five flavors. **Method:** Based on the group representation of five elements (wood, fire, earth, metal, and water), the correlations of "property" flavor, "function" flavor, and "transformation" flavor with five elements' generation-restriction were deduced based on matrix calculation and group theory. The three-dimensional calculation method for vector product was expanded for establishing the mathematical operator of five flavors' compatibility-transformation. **Result and Conclusion:** There is a mapping relationship of the purging, tonifying, and harmonizing functions represented by the "property" flavor, "function" flavor, and "transformation" flavor of the five zang organs in the "Tangye Jingfatu" with the five elements' generation-restriction. The established mathematical operator contributes to explaining the fixed collocations of five flavor transformation. Based on such algorithm, the tonifying and purging characteristics of five flavors in 10 representative classic prescriptions have been clearly expounded.

[Keywords] Tangye Jingfatu; five elements; mathematical model; Chinese herbs; compatibility

汤液经法图又称“五味补泻体用图”，是已遗医书《汤液经法》的关键枢要，因敦煌遗书《辅行诀五脏用药法要》的转载而保留下来。学术界一般认为，汤液经法图是张仲景《伤寒杂病论》经方配伍的本源理论之一，对于解读经方用药原则、还原中药配伍理论具有十分重要的理论和实践价值^[1-3]。从内容上看，汤液经法图描述的是脏腑虚实和五味补泻的辨证论治理论体系，通过五味对五脏的补泻，实现对于脏腑虚实的治疗。从五味五脏对应关系看，汤液经法图未采用一脏对应一味传统模式，而是基于五行生克关系，建立了五脏的补味、泻味和调味3种对应关系。从图形对称性上看，汤液经法图具有严谨、循环对称的五脏五味配属关系，其背后一定蕴含着特定的数学规律。然而，目前关于汤液经法图的研究多为描述性研究和验证性研究^[4-8]，缺少深层内涵和数学规律的探索。

实际上，汤液经法图的五味五脏配属关系中，最为独特的当属五味化合关系。即补味治疗该脏的虚证，泻味治疗该脏的实证，补味与泻味化合可以形成该脏的调和之味。例如，补肝的辛味和泻肝的酸味化合得到缓肝的甘味、补肾的苦味和泻肾的

甘味化合得到润肾的咸味等。辛味与酸味化合得到甘味而不是咸味或苦味，苦味与甘味化合得到咸味而不是酸味或辛味，这就是五味化合关系的核心规律。采用数理分析方法，可以明确这种化合关系背后的数理逻辑和运算规律。团队前期针对汤液经法图开展了系列研究^[9-14]，梳理了汤液经法图的源流，还原了汤液经法图的基本内容，尝试将其应用于新冠肺炎治疗方的解读，并且采用穷举法和一笔画原理，对其中五味配伍化合原理的数学逻辑进行了初步探索，发现了一些可开发性的趋势。

在此基础上，本文直接以五行生克关系为切入点，在充分考察五行数理研究工作和汤液经法图的原理分析基础上，创新性地利用群论的理论和计算方法，建立汤液经法图的数学模型和五味化合算法，将汤液经法图中的化合计算结构加以提炼总结，为未来基于汤液经法图建立中药配伍理论分析系统和中药方剂设计系统提供了一些基础性参考。

1 五行理论的数学模型

五味化合规律与五行生克关系密不可分，研究五味化合规律需从五行生克关系入手。近年来，有越来越多的学者用现代数学工具描述五行学说，用

不同的方式表示五行的状态和生克乘侮转化。这当中使用的数学工具种类繁多,包括但不限于集合论、矩阵、拓扑学、图论、三角函数、微分方程等^[15]。利用多种数学工具建立的模型中,有些是静态的描述性模型,有些是动态的动力学模型。本研究的重点在于梳理描述汤液经法图中五味之“体”“用”“化”与五行的关系,因此主要引述相关静态模型的研究进展。

王涛^[16]在其研究中引入了群论来表示五行的关系。将五行循环关系表示为1个五元循环群 $G_5 = \{木, 火, 土, 金, 水\}$ 。用数字1~5代表木、火、土、金、水,则该群可改写为 $G_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。研究中提出用五进制加法运算作为群的自映射运算规则。在这种表示方式下,相生关系表示为生成元为1的五进制加法运算,相克(乘)关系对应生成元为2,相侮关系对应生成元为3,被生关系对应生成元为4。这一初步研究给出了五行循环关系的群表示,希望利用循环群在数学上的动态稳定性来证明五行体系具有动态稳定结构,但是对于循环群需要满足的性质未给出证明,特别是对单位元和逆元缺乏论述。

吴大为等^[17]在后续的研究中将相生、相克、相侮、子病及母4种关系建立了4个矩阵。用1~5代表木、火、土、金、水,建立5×5矩阵,矩阵中的元素,表示对应的*i*和*j*之间有关系,表示对应的*i*和*j*之间无关系。其中,*i*和*j*的关系是有向的,当表示*i*对*j*有相生关系时,得到相生矩阵*R*。由此进一步写出相克矩阵*S*,相侮矩阵*W*和子病及母矩阵*V*。

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

按照矩阵乘法,将2个相生矩阵*R*相乘,就得到相克矩阵*S*,再连乘相生矩阵*R*可以得到*W*和*V*。 $S = R^2, W = R^3, V = R^4$,而 R^5 将等于单位矩阵*I*。规定 $R^5 = R^0 = I$,则 R^0, R^1, R^2, R^3, R^4 对矩阵乘法构成1个五阶循环群。显而易见, R^0 是群的单位元;所有元素都有逆元存在, $(R^0)^{-1} = R^0, (R^1)^{-1} = R^4, (R^2)^{-1} = R^3$;任意两元素相乘仍然是群中的元素, $R^i R^j = R^{i+j} = R^{(i+j) \bmod 5} \in G, R^0 = I \in G$,满足封闭性;由于使用矩阵乘法规则,也满足结合律。此外, $R^0, R^1, R^2,$

R^3, R^4 都是正交矩阵,且 R^0, R^1, R^2, R^3, R^4 之间线性无关。

在木火土金水五维欧氏空间中,五个坐标轴上的单位向量 x_i 分别为木 $x_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$,火 $x_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$,土 $x_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$,金 $x_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$,水 $x_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ 。简单验算可见用上述五行向量乘以相生矩阵*R*,相克矩阵*S*,相侮矩阵*W*和子病及母矩阵*V*可以进行生克(乘)侮和子病及母转化。

在前文说明矩阵乘法群封闭性时,已经将上标写作了模5的加法形式。王为民^[18]提出用数字集合{0, 1, 2, 3, 4}代替金木水火土形成1个模5的加法群。该群的封闭性、结合律、单位元、逆元与矩阵乘法群等价,不再赘述。

小结当前的研究进展,用五元循环群表示五行循环关系时,即可以将木火土金水五行作为群元素,也可以将不变、相生、相克、相侮、子病及母5种变化作为群元素。分析后不难发现,这两种表示也是具有内在联系的。当按照木火土金水相生顺序排列五行构建循环群时,已经默认了一个单位1的加法生成元或一个一阶的乘法生成元,这个生成元就代表相生,这是由定义和排序直接得到的,不需要进一步的循环论证。从生成元的角度分析,*n*元群中的生成元个数是小于*n*且与*n*互素的数的个数。小于5的数中1~4都与5互素,因此五元群有4个生成元,正对应相生、相克、相侮、子病及母的关系。

使用循环群来表示五行的循环关系是比较方便直观的,由于五味与五行的对应性,在下面的分析中也使用循环群来表示五味的关系。

2 基于五行群表示的五味体、用、化关系分析

汤液经法图示意,见图1。木火土金水五行相生顺序中各行所对应的“体”味分别为酸苦辛咸甘,对应的“用”味分别为辛咸甘酸苦,对应的“化”味分别为甘酸苦辛咸。使用模5加法群表示,设木火土金水为{*M, H, T, J, S*},其中 $M = 0, H = 1, T = 2, J = 3, S = 4$,分析某行之“体”与其他行之“用”“化”的关系。

酸,为木之“体”,金之“用”,火之“化”。 $(M + 3) \bmod 5 = J, (M + 1) \bmod 5 = H$ 。苦,为火之“体”,水之“用”,土之“化”。 $(H + 3) \bmod 5 = S, (H + 1) \bmod 5 = T$ 。辛,为土之“体”,木之“用”,金之“化”。 $(T + 3) \bmod 5 = M, (T + 1) \bmod 5 = J$ 。咸,为金之

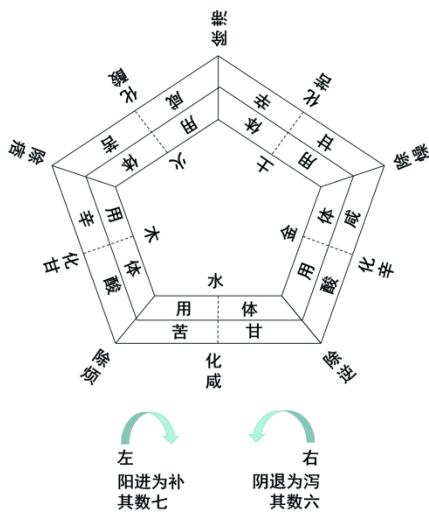


图1 汤液经法图

Fig. 1 Tangye Jingfatu

“体”，火之“用”，水之“化”。 $(J + 3) \bmod 5 = H, (J + 1) \bmod 5 = S$ 。甘，为水之“体”，土之“用”，木之“化”。 $(S + 3) \bmod 5 = T, (S + 1) \bmod 5 = M$ 。

可见，某一味作为“体”味所对应的行和其作为“用”味所对应的行之间是加3模5关系，3作为生成元对应的五行关系是相侮，其逆元是2，相克。所以，一个味“为体”与“为用”两行间是相侮关系，“为用”与“为体”两行之间是相克的关系。例如酸味，在肝木是能泻的“体”味，在肺金是能补的“用”味，可以推测汤液经法图中的“体”“用”补泻关系是基于五行相克相侮关系进行的总结，补某一行相当于泻其所克之行，泻某一行等于补其被克之行。

某一味作为“体”味所对应的行和其作为“化”味所对应的行之间是加1模5关系，1作为生成元对应的五行关系是相生，其逆元是4，子病及母。所以，一个味“为体”与作为“化”味的两行间是相生关系，反过来是子病及母的关系。甘味，作为能缓肝木的“化”味，在肾水是能泻的“体”味，体现出汤液经法图提示泻某一行相当于缓其所生之行，缓某一行相当于泻其被生之行。

进一步分析“用”味与“化”味的关系。某一味作为“用”味所对应的行和其作为“化”味所对应的行之间是加3模5的关系，这个关系与“体”味和“用”味的关系相同。所以，一个味“为体”与作为“化”味的两行间是生成元为3的相侮关系，反过来是生成元为2的相克关系。辛味，作为能补肝木的“用”味，在肺金是能缓的“化”味，体现出汤液经法图提示补某一行相当于缓其相侮被克之行。

根据这一关系笔者进一步尝试解释“阳进为补

其数七”和“阴退为泻其数六”的含义。在五边形图的边或顶点上顺时针或逆时针计数，等价于模5的加法。图中五行按顺时针相生顺序排布，顺时针进七等于加2模5，逆时针退六等于加4模5。从前文“味”与“行”的关系分析中，只根据图中规则归纳了一个加4模5的关系，就是“化”味与“体”味间的关系。又由于“体”味对应的功能是“泻”，可以推测，“阴退为泻其数六”指的是某一行对应的“化”味可在逆时针计数6对应的行中作为“体”味起泻的作用。以肝木为例，退六对应肾水，木之“化”味甘，在水为“体”味，可泻肾。其他诸行以此类推也可以得到与图相符的结果。

同样从“化”味出发，“阳进为补其数七”的加2模5关系对应的是“化”味到“用”味。“用”味对应的功能是补，可以推出“阳进为补其数七”指的是某一行对应的“化”味可在顺时针计数7对应的行中作为“用”味起补的作用。同样以肝木为例，进七对应脾土，木之“化”味甘，在土为“用”味，可补脾。

3 五味化合规则分析

汤液经法图所示的五味配伍及化合关系中，除前文分析的“体”“用”“化”相互关系外，还有非常重要的一个概念，就是药味的化合。图中五边形每一条边外的文字代表了药味化合关系，分别为酸辛化甘、苦咸化酸、辛甘化苦、咸酸化辛和甘苦化咸。由于图中各行“体”味，“用”味，“化”味的顺时针排序都是甘酸辛苦咸循环，不妨将木火土金水的“化”味甘酸苦辛咸用1~5代表。令 $i = 1, 2, 3, 4, 5, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ，建立 r_{ij} 的 5×5 矩阵。用1表示 ij 之间有化合作用，0表示没有化合作用，得到化合关系矩阵 C 。

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

建立甘酸苦辛咸五维欧氏空间，则其5个标准正交基向量 t_i 分别为甘 $t_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$ ，酸 $t_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ ，苦 $t_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ ，辛 $t_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$ ，咸 $t_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ 。计算 t_i 与 C 的乘积，得到 $t_1 C = (0, 0, 1, 1, 0) = t_3 + t_4$ ； $t_2 C = (0, 0, 0, 1, 1) = t_4 + t_5$ ； $t_3 C = (1, 0, 0, 0, 1) = t_5 + t_1$ ； $t_4 C = (1, 1, 0, 0, 0) = t_1 + t_2$ ； $t_5 C = (0, 1, 1, 0, 0) = t_2 + t_3$ 。

从五行对应的“化”味分析，某一行“化”味作为

“体”或“用”化合的合理配合对象为该行相克及相侮之行的化味。以木之“化”味甘为例,甘味在图中规定的合理配合对象为与木相克相侮的金、土之“化”味辛和苦。

基于上述分析,汤液经法图中规定的五味化合关系从“化”味角度来看,就是相克与相侮之行的“化”味可以化合为一种新的味。这也符合“顺七”与“逆六”的规律,即某行的化味与其“顺七”之行的化味化合,可以得到“逆六”之行的化味。

进一步分析化合味的规律。甘苦化咸, t_1 与 t_3 作用得到 t_5 ;苦咸化酸, t_3 与 t_5 作用得到 t_2 ;咸酸化辛, t_5 与 t_2 作用得到 t_4 ;酸辛化甘, t_2 与 t_4 作用得到 t_1 ;辛甘化苦, t_4 与 t_1 作用得到 t_3 。可见,任意一组“体-用-化”组合,都是“体”和“用”,“用”和“化”各差了一个 R^2 变换,等价于五行的“相克”变化关系。由于“体”“用”“化”的排序循环相同,任意一行的化合关系中,作为“用”的味,正是与该行相克之行的“体”味。而两者所化之味,是该所克之行的“用”味。因此,某行的“用”味与“化”味就是其所克之行的“体”味与“用”味。

考察构成一组化合关系的“体”“用”味在其他相关行的作用,如前所述,同一味为“体”,为“用”的两行间是相克或相侮关系。结合汤液经法图的中医含义,可以将某一行“体”“用”化合的规律小结为两种表达形式:①可泻某一行的味,与可泻其相克之行的味化合,可缓该行;②另外一种表达是可补某一行的味,与可补其相侮被克之行的味化合,可缓该行。例如酸味可泻肝木,辛味可泻肝木所克之脾土,酸辛化甘可以缓肝;辛味可补肝木,酸味可补能克肝木之肺金,酸辛化甘可以缓肝。

4 五味化合算法

笔者借助相关数学工具分析了汤液经法图中的五味与五行及“体”“用”“化”之间的关系,提炼了一些规律,但是在汤液经法图最重要的“化合”关系方面,只是找到了一些组合规律。接下来将尝试找到代表“化合”关系的运算,构建五味“化合”算法。

使用甘酸苦辛咸的向量表示,甘 $t_1 = (1, 0, 0, 0, 0)$, 酸 $t_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$, 苦 $t_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$, 辛 $t_4 = (0, 0, 0, 1, 0)$, 咸 $t_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$ 。“化合”的过程就是两个向量相互作用得到一个新的向量。在现有的计算中,与这一计算最为接近的是向量的外积。

外积是线性代数中一个重要的概念,最初源于对物理学中力矩等物理量的描述。在几何空间中

向量外积的定义如下,2个向量 a_1 与 a_2 的夹角为 $\omega (0 \leq \omega \leq \pi)$, 则 a_1 和 a_2 的外积也是一个向量,记为 $a_1 \times a_2$, 其长度为 $|a_1 \times a_2| = |a_1| |a_2| \sin \omega$, 其方向垂直与 a_1 和 a_2 组成的平面,并且构成右手系^[19]。

在三维空间中的外积具有优良定义,且计算方法也已经非常明确。三维空间的3个标准正交基 $i(1, 0, 0), j(0, 1, 0), k(0, 0, 1)$ 用外积运算可以得到1个循环结构, $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$ 。同时,这种计算是有向的,不遵循交换律。如果用 $j \times i$, 则结果将变为 $-k$ 。借用这类计算的性质来处理“体-用-化”的关系。五味的向量表示是五维的,而在五维空间中向量外积的物理意义不明确。有不少学者一直尝试将向量的外积运算推广至高维欧式空间,并给出了具体的行列式计算方法^[20-22],也在一些领域有了应用尝试^[23-28]。

外积的推广基于外积的行列式定义,设2个向量 $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ 与 $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, 外积可写为一个三阶行列式。

$$a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (1)$$

式中 i 表示单位向量 $i = (1, 0, 0), j$ 表示单位向量 $j = (0, 1, 0), k$ 表示单位向量 $k = (0, 0, 1)$ 。

相关研究中给出高维空间下外积的定义是在 $n (n \geq 3)$ 维欧式空间 R^n 中的任意 $n - 1$ 个向量的向量积^[10,16], 设 e_1, e_2, \dots, e_n 是 n 维欧式空间的1个标准正交基, $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ 是该空间中的 $n - 1$ 个向量, 则所有 a_i 的外积可以表示为如下行列式形式:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} \quad (2)$$

也可简写为:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \rangle = \sum_{i=1}^n A_i e_i \quad (3)$$

式中, A_i 是式(2)中第1行元素 $e_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的代数余子式。已经有学者证明了这种定义推广也满足几何空间外积运算几何性质的推广^[10]。

那么显然,五维空间的内积是4个向量运算,这显然不符合进行“化合”计算的要求。对于在高维空间中2个向量到1个向量的映射,有学者做了四维空间的工作^[13]。记 $e_1(1, 0, 0, 0), e_2(0, 1, 0, 0),$

$e_3(0, 0, 1, 0)$, $e_4(0, 0, 0, 1)$ 。 $\forall a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in R^4$, 定义 $a \times b$ 为 R^4 到 R^4 的 1 个算子如下:

$$(a \times b)(c) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n A_i e_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in R^4 \quad (4)$$

式中, A_i 是式(4)行列式里第 1 行元素 e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 的代数余子式。可见, 在四维空间中定义 2 个向量 a, b 向量积 $a \times b$ 的算子需要添加 1 个向量 c 。可以推断, 在五维空间中找到合适的 2 个向量也可以建立类似的向量积算子。

$$(t_i \times t_j)(t_{j(mod5)+1})(t_{i(mod5)+1}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ t_{i1} & t_{i2} & t_{i3} & t_{i4} & t_{i5} \\ t_{j1} & t_{j2} & t_{j3} & t_{j4} & t_{j5} \\ t_{j(mod5)+1} & t_{j(mod5)+2} & t_{j(mod5)+3} & t_{j(mod5)+4} & t_{j(mod5)+5} \\ t_{i(mod5)+1} & t_{i(mod5)+2} & t_{i(mod5)+3} & t_{i(mod5)+4} & t_{i(mod5)+5} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n A_k t_k \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), (j = 1, 2, 3, 4, 5), (k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (6)$$

该算子满足右手法则, 要求输入的变量是有序的。根据行列式运算的性质, 输入的 t_i 和 t_j 如果交换顺序, 结果会相反, 得到公式(7)。

$$t_i \times t_j = -t_j \times t_i \quad (7)$$

所以需要基向量按甘酸苦辛咸的顺时针顺序排布, 且 t_i 输入“体”味, t_j 输入“用”味。应用式(6)对 t_i 和 t_j 的各种组合进行计算的结果见表 1。

表 1 五味“化合”计算

Table 1 Calculation results of the combination of five flavors

项目	五味	为“用”				
		t_1 甘	t_2 酸	t_3 苦	t_4 辛	t_5 咸
为“体”	t_1 甘	0	0	t_5 咸	$-t_3$ 苦	0
	t_2 酸	0	0	0	t_1 甘	$-t_4$ 辛
	t_3 苦	$-t_5$ 咸	0	0	0	t_2 酸
	t_4 辛	t_3 苦	$-t_1$ 甘	0	0	0
	t_5 咸	0	t_4 辛	$-t_2$ 酸	0	0

从表 1 可以看出, 从三维空间向量外积算法外推得到的算子可以较好地表达汤液经法图中的“化合”关系。如果不是汤液经法图中合法化合的两味, 计算结果为 0; 如果“体”“用”的输入顺序与图中的顺时针顺序相反, 将输出对应“化”味向量的负数结果。验算结果表明, 可以使用该算子对有序向量化的五味数据进行“化合”计算, 计算结果具有解释力。换句话说, 本文所建立的数学模型, 准确拟合了汤液经法图所示的五味配伍化合理论内容。

对于甘酸苦辛咸五味, 由于都是标准正交基向量, 所以 2 个向量的 1 个五维外积算子 $t_i \times t_j$ 可以定义为:

$$(t_i \times t_j)(c)(d) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ t_{i1} & t_{i2} & t_{i3} & t_{i4} & t_{i5} \\ t_{j1} & t_{j2} & t_{j3} & t_{j4} & t_{j5} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n A_k t_k \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), (j = 1, 2, 3, 4, 5), (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\forall c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \in R^5, d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) \in R^5 (5)$$

经过尝试, $t_{j(mod5)+1}$ 和 $t_{i(mod5)+1}$ 是两个合适的向量, 令 $c = t_{j(mod5)+1}, d = t_{i(mod5)+1}$, 则式(5)可改写如下形式:

5 经方案例的验证分析

以《伤寒论》所载 10 首代表性经方为例, 示例五味化合算法在经方分析中的应用, 验证算法的准确性。

5.1 方法学举例 以麻杏石甘汤为示例, 阐述五味化合算法的应用方法。麻杏石甘汤由麻黄、石膏、苦杏仁和甘草组成。根据《辅行诀五脏用药法要》中关于 25 味药精的药性记载^[1], 《辅行诀五脏用药法要药性探真》^[29]和汤液经法图关于经方用药药性的相关研究^[10], 这 4 味中药的主导药味分别为麻黄味辛, 石膏味酸, 苦杏仁味苦, 甘草味甘。从中药的功能主治角度分析, 麻黄宣肺止咳, 苦杏仁止咳平喘, 甘草止咳化痰, 石膏清热泻火, 是一首治疗咳嗽的组方。但是如果从药味角度来看, 四种药味具有不同的功效特点, 辛能散能行, 酸能收能涩, 苦能泄能燥, 甘能补能缓, 虽有君臣佐使之分, 但却仍然无法明确其配伍目的和用意。

而采用本文所示的五味化合算法, 就能够一目了然地明确麻杏石甘汤的配伍内涵。根据五味化合算法, 令 t_4 代表辛味药麻黄, t_2 代表酸味药石膏, t_3 代表苦味药苦杏仁, t_1 代表甘味药甘草, 采用化合算子对 t_4 辛, t_2 酸, t_3 苦和 t_1 甘的配伍情况进行分析。结果显示, 在所有的 6 种两两向量内积情形中, 发现只有 $t_1 \times t_3 = t_5$ 咸和 $t_2 \times t_4 = t_1$ 甘 2 个有意义的配伍化合, 其余如 $t_3 \times t_4, t_2 \times t_3$ 等组合不存在配伍化合。所以, 组方配伍后最终会形成“咸-辛-酸”和“甘-苦”

2种药味组合模式。其中,咸-辛-酸模式属于肺病的治疗思路,即“肺德在收,以酸补之,以咸泻之,以辛散之”,而甘-苦则属于脾胃病的治疗思路,即“脾德在缓,以甘补之,以辛泻之,以苦燥之”。考虑到4味组方中药的具体功效和归经(麻黄归肺、膀胱经,苦杏仁归肺、大肠经,甘草归心、肺、脾、胃经,石膏归肺、胃经),发现4味中药均归肺经,而仅有甘草和石膏归胃经。且从功效上看,治肺病的中药占主导,而治脾胃病的中药占少数。据此可知,麻杏石甘汤主要是治疗肺病表现出肺热咳喘的中药复方,其中,苦杏仁与甘草配伍形成的咸味泻肺为主,麻黄

辛味散肺为辅,石膏酸味补肺为辅。

从数学角度上看,对于麻杏石甘汤的组方配伍,选药(输入) t_4 (麻黄), t_2 (石膏), t_3 (苦杏仁)和 t_1 (甘草);配伍过程 $t_1 \times t_3 = t_5$ (甘苦化咸);功效(输出) $t_5 + t_4 + t_2$ (咸-辛-酸,泻肺实)。

采用五味化合算法计算得到的麻杏石甘汤的五脏补泻特点(主肺实喘咳),与临床上经常以麻杏石甘汤为底方进行肺热咳喘的治疗常规相符。

5.2 10首代表性经方的验证分析 基于上述分析方法,分别计算桂枝汤等10首经方的选药(输入),配伍过程和功效(输出),阐明经方配伍的实质,见表2。

表2 10首代表性经方选药的五味化合配伍情况

Table 2 Calculation results of 10 classic prescriptions with combination of five flavors

No.	方名	选药(输入)	配伍过程	功效(输出)	临床适应症
1	桂枝汤	t_4 (桂枝、生姜), t_2 (白芍), t_1 (甘草、大枣)	$t_2 \times t_4 = t_1$ (酸辛化甘)	$t_1 + t_4$ (补肝木)	表虚感冒,鼻塞出汗
2	葛根汤	t_4 (桂枝、生姜、麻黄), t_2 (白芍), t_1 (葛根、甘草、大枣)	$t_2 \times t_4 = t_1$ (酸辛化甘)	$t_1 + t_4$ (补肝木)	表虚感冒伴项背僵硬
3	三黄泻心汤	t_3 (黄连、黄芩), t_5 (大黄)	$t_3 \times t_5 = t_2$ (苦咸化酸)	$t_3 + t_2$ (泻心火)	咽喉肿痛,吐血衄血
4	栀子豉汤	t_3 (栀子), t_2 (香豉)	无化合	$t_3 + t_2$ (泻心火)	心烦失眠
5	理中丸	t_1 (人参、甘草), t_4 (干姜), t_3 (白术)	$t_4 \times t_1 = t_3$ (辛甘化苦)	$t_1 + t_3$ (补脾土)	畏寒肢冷,食少纳呆
6	干姜人参半夏丸	t_1 (人参), t_4 (干姜、半夏)	$t_4 \times t_1 = t_3$ (辛甘化苦)	$t_4 + t_3$ (泻脾土)	呕吐
7	麻杏石甘汤	t_4 (麻黄), t_2 (石膏), t_3 (苦杏仁), t_1 (甘草)	$t_1 \times t_3 = t_5$ (甘苦化咸)	$t_5 + t_4 + t_2$ (泻肺实)	肺热咳喘
8	大承气汤	t_5 (大黄、厚朴、芒硝), t_2 (枳实)	$t_5 \times t_2 = t_4$ (咸酸化辛)	$t_5 + t_4$ (泻肺实)	肺热便秘
9	猪苓汤	t_1 (猪苓、茯苓、阿胶、滑石), t_5 (泽泻)	无化合	$t_1 + t_5$ (泻肾水)	水热互结,口渴
10	肾气丸	t_3 (地黄、牡丹皮), t_4 (附子、肉桂), t_2 (山茱萸), t_1 (茯苓、山药), t_5 (泽泻)	$t_2 \times t_4 = t_1$ (酸辛化甘), $t_1 \times t_3 = t_5$ (甘苦化咸)	$t_3 + t_5 + t_4 + t_1$ (补肾水+补肝木)	肾气不足,腰痛脚软

五味配伍化合算法,可以明确、清晰地阐述经方的五味补泻功效特点,与经方临床应用的适应症基本相符。如桂枝汤以补肝木为主,治疗肝木虚证,表现为鼻塞、汗出、头晕等。三黄泻心汤以泻心火为主,治疗心火实证,表现为咽喉肿痛,或者吐血衄血等血热妄行病证。大承气汤以泻肺金为主,治疗肺金实证(肺与大肠相表里),表现为肺热便秘、大便干结。上述代表性经方的验证分析也说明,本文所构建的模型算法是可靠的。

6 结论与讨论

6.1 五行生克与五味化合的群论表达方式 群论作为一类重要的数学理论,除了在代数研究自身领域外,在其他学科也有着重要的应用。例如在理论物理领域,群表示论中的紧致群、李群等成为了深入研究理论物理的有力工具。在中医理论中,五

行、五脏、五味等概念都可以以集合表示,而且集合中的元素都有相互关系,这些关系构成了一些循环结构并且能体现对称性。使用群论中比较基础的数学工具,就可以刻画中医理论相关的集合和其中元素的二元运算,这样的好处是可以把之前只能用文字说明的很多理论问题用数学形式表示。传统中医理论中蕴含了传统文化的很多精华,也包括河图、洛书到阴阳五行的术数理论,这些理论在中医典籍中有大量体现,例如汤液经法图中的“阳进为补其数七”“阴退为泻其数六”等,其文字表达往往较为复杂晦涩。用合适的工具对中医理论中的这部分内容进行数学表达,可以一定程度上简化表示,特别是能够帮助识别一些文字表达不同而在数学上等价的情况。从这个角度看,群论等数学工具对中医、方剂理论与实践的研究,特别是未来与信

息技术的结合提供帮助。

本研究借鉴了五行关系的群表示方法研究了汤液经法图中甘酸苦辛咸五味的“体”“用”“化”关系。结果发现,汤液经法图对五味与五行的对应关系中存在如下规律:①某味作为补某一行的“用”味,也同时是泻其所克之行的“体”味,即补某一行相当于泻其所克之行,泻某一行等于补其被克之行;②某味作为泻某一行的“体”味,也同时是缓其所生之行的“化”味,即泻某一行相当于缓其所生之行,缓某一行相当于泻其被生之行;③某味作为缓某一行的“化”味,也同时是其所克之行的“用”味,即缓某一行相当于补其相克之行,补某一行相当于缓其相侮被克之行。根据这一组分析,研究推断汤液经法图中“阳进为补其数七”和“阴退为泻其数六”相当于是说明了“化”味与“用”味和“体”味的关系。本研究进一步分析了五味化合的规律,总结了五味之间化合存在的固定模式,例如“甘苦”可以化咸,而“甘酸”不可以化咸。运用基于外积计算在五维欧式空间的推广,可以得到五味化合算子,该算子可以简明地表达汤液经法图中具有唯一固定搭配的化合结果,并能排除错误的化合组合,发现并纠正反向的“体”“用”关系。

6.2 五味配伍化合数字化表述的应用价值 汤液经法图采用五脏虚实和五味补泻的方式,展现了一幅精准的中药配伍原理图,其中,尤其以五味化合理论为最独特。理论上,五味化合理论为寻找多味中药配伍后最终的药效侧重点提供了关键“钥匙”,可以对中药复方进行药味重整,找到最终作用的关键脏腑。而采用数学模型和数字化表述的方法,无疑更清晰地展示了这种配伍化合过程,并且完整给出全部配伍化合可能性,为五味化合理论的推广应用奠定了基础。并且,对于越复杂的复合药味配伍模式,采用本文所示的五味配伍化合的数学分析,越能有利于清晰的展现功效聚焦点和集散度,展现潜在的功效特点。实际上,在本文所示五味化合数学模型的基础上,结合单味中药的药性知识库,在大量真实临床方剂的案例验证之后,未来可以拓展为一个基于汤液经法图的中药复方配伍原理的智能分析系统,开展组方分析、经方研究、处方点评、医保控费等一系列工作,具有较大的应用价值。

6.3 研究的局限性 本研究在汤液经法图的五脏虚实辨证和五味补泻治疗框架下,建立了中药配伍的五味化合算法。所以,算法的应用须在汤液经法图理论框架下开展。但是,目前对于汤液经法图的

研究尚处在初级阶段,一些问题例如中药五行属性(水中木、金中火等)的本质含义、复合药味中主导药味的认定等,还需要更加深入地研究。

同时,本研究提出的化合算子依然存在一定的局限性,最终的算法依然是五维空间中4个向量的运算,只不过是提出了一个序号上模5加1按顺序添加2个辅助向量的规则。根据外积几何意义的推广,这相当于是算出垂直于这4个向量所张开的超平面,方向遵循右手规则的一个向量,而向量模长的几何意义表示这4个向量所围超立方体的体积。由于目前带入计算的都是标准基向量,模长均为1,所以只有0,1和-1这3种结果可能。如果未来的应用场景涉及对模长不为1的五味状态函数进行运算,其所得向量模长的含义还有待进一步的深入研究,需要审慎使用。

此外,本研究使用相关的数学工具主要目的是在于寻找汤液经法图中五味与五行的“体”“用”“化”及“化合”规律。由于汤液经法图的相关理论处于缺失状态,所以本文所做的工作更多的是在尝试较为系统全面的提取图中所蕴含的信息,所用的数学工具仅是为了保证分析过程的逻辑性和完整性,并不能直接说明汤液经法图本身的科学性。要求证汤液经法图本身的科学性,还需要未来大量的理论和实验研究,例如对于两味化合与单味药作用的相似性比较等。

[利益冲突] 本文不存在任何利益冲突。

[参考文献]

- [1] 陶弘景. 辅行诀五脏用药法要传承集[M]. 张大昌, 钱超尘, 主编. 北京:学苑出版社, 2008:3-13.
- [2] 钱超尘. 《汤液经法》、《伤寒论》、《辅行诀》古今谈(待续)[J]. 世界中西医结合杂志, 2008, 3(6): 311-315.
- [3] 王淑民. 《辅行诀脏腑用药法要》与《汤液经法》、《伤寒杂病论》三书方剂关系的探讨[J]. 中医杂志, 1998, 39(11): 694-696.
- [4] 李博灵, 黄韵婷, 刘洋, 等. 《辅行诀》“汤液经法图”初识[J]. 中国中医基础医学杂志, 2017, 23(6): 760-761, 790.
- [5] 潘小凤, 储全根. 《辅行诀五脏用药法要·汤液经法图》药味组方法则初探[J]. 安徽中医药大学学报, 2016, 35(3): 14-16.
- [6] 李刚, 张薛光, 陈广东, 等. 《汤液经法》图略解[J]. 中国中医基础医学杂志, 2015, 21(9): 1148-1150.
- [7] 李兆弟. 《辅行诀脏腑用药法要》所载《汤液经法》图的研究[D]. 北京:中国中医科学院, 2014.
- [8] 高亮. 基于汤液经法图“五味十法”的《伤寒论》方药

- 运用规律研究[D]. 北京:北京中医药大学,2013.
- [9] 金锐.“汤液经法图”系列研究之一:汤液经法图的来历、内容与应用[J]. 世界科学技术—中医药现代化, 2020,22(8):2954-2960.
- [10] 金锐.“汤液经法图”系列研究之二:基于五味补泻理论的10首经方配伍原理解析[J]. 世界科学技术—中医药现代化,2020,22(8):2961-2968.
- [11] 王宇光,金锐.“汤液经法图”系列研究之三:25味药精五行属性内涵的探索性研究[J]. 世界科学技术—中医药现代化,2021,23(2):385-390.
- [12] 金锐,韩晟.“汤液经法图”系列研究之四:五味化合规律的数理分析[J]. 世界科学技术—中医药现代化,2021,23(4):1036-1041.
- [13] 金锐.从“汤液经法图”角度探讨中医治疗新型冠状病毒肺炎的组方配伍共性规律[J]. 中国医院用药评价与分析,2020,20(6):645-647.
- [14] 金锐,王宇光.从汤液经法图解析清肺排毒汤的配伍和功效[J]. 中医学报,2020,35(12):2487-2493.
- [15] 张蕾,严广乐.近年中医学阴阳五行学说定量模型研究[J]. 中医学报,2010,25(3):445-447.
- [16] 王涛.五行学说动力学模型研究[D]. 上海:复旦大学,2008.
- [17] 吴大为,樊旭,艾群,等.五行学说思维模型的数学结构[J]. 中国中医基础医学杂志,2008,14(4):308-311.
- [18] 王为民.五行模五加法群[EB/OL]. 2019-07-03 (2021-08-19). http://blog.sina.com.cn/s/blog_1702bdef00102ywf2.html.
- [19] 房庆祥,王巍.中医五行学说思维模型研究[J]. 大学数学,2011,27(6):100-104.
- [20] 夏盼秋.高维欧氏空间中向量的外积[J]. 大学数学,2011,27(4):159-164.
- [21] 熊明.外积的推广及其性质和应用[J]. 高等数学研究,2014,17(4):62-63,76.
- [22] 刘海峰.论向量积在高维空间的推广[J]. 大学数学,2014,30(3):74-78.
- [23] 门少平.四维向量的向量积运算[J]. 上海应用技术学院学报:自然科学版,2013,13(4):321-324.
- [24] 耿修瑞,赵永超,刘素红,等.高维叉积的矩阵计算以及在高光谱图像端元自动提取中的应用[J]. 中国科学:信息科学,2010,40(4):646-652.
- [25] 蔡惠京.四维欧氏空间中的向量积运算及其应用[J]. 广东广播电视大学学报,2009,18(1):94-98.
- [26] 吴成茂.欧氏空间中一种外积定义的推广及其应用[J]. 西安邮电学院学报,1997(4):39-43.
- [27] 王录勋.向量外积的推广[J]. 陕西教育学院学报,1995,11(4):92-94.
- [28] 张沛和,周瑜. R^n 空间的矢量积及其应用[J]. 嘉应大学学报,2000(3):5-9.
- [29] 衣之镖.辅行诀五脏用药法要药性探真[M]. 北京:学苑出版社,2013.

[责任编辑 顾雪竹]